Varianta 060

Subiectul I

a) $\left|\frac{4+5i}{6+7i}\right| = \frac{\sqrt{41}\cdot\sqrt{85}}{85}$.

b) $d = \frac{11\sqrt{3}}{3}$.

c) $A(2,3)$.

d) Punctele L, M, N sunt coliniare, deoarece $\overrightarrow{LN} = 2\cdot\overrightarrow{LM}$.

e) $V_{ABCD} = \frac{7}{3}$.

f) $a = \frac{39}{61}$ şi $b = \frac{2}{61}$.

Subiectul II

1.

a) În mulțimea $\mathbf{Z}_7$, $\hat{2}^{2007} = \hat{1}$.

b) $C_3^0 \cdot C_3^1 \cdot C_3^2 \cdot C_3^3 = 9$.

c) $g(3) = 1$.

d) $x = 2$.

e) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 1$.

2.

a) $f'(x) = 3^x \ln 3 + 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{4+\ln 3}{2\cdot \ln 3}$.

c) $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

d) $\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 3\cdot \ln 3 + 1$.

e) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^4+10}\,dx = \frac{1}{4}\cdot \ln\frac{11}{10}$.

Subiectul III

a) Evident.

b) $\det(A) = 40$.

c) De exemplu, dacă $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rang}(P) = 1$ şi $\operatorname{rang}(Q) = 2$.

d) Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\in M$. Avem $\det(A)\in \mathbf{Z}$.

$\det(A)=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \overset{\substack{c_2\leftarrow c_2-c_1 \\ c_3\leftarrow c_3-c_1}}{=} \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & d_3 & e_3 \end{vmatrix}$, cu $d_i=b_i-a_i$ şi $e_i=c_i-a_i$ numere întregi pare, pentru orice $i\in\{1,2,3\}$, de unde rezultă că $\det(A)$ este divizibil cu 4.

e) Dacă $B\in M$ este o matrice inversabilă, atunci $\det(B)\neq 0$ şi este divizibil cu 4.

Dacă $B^{-1}\in M$, rezultă că $\det(B^{-1})\in \mathbf{Z}$. Dar $\det(B^{-1})=\dfrac{1}{\det(B)}\notin \mathbf{Z}$, contradicţie.

f) Se demonstrează prin inducţie că pentru orice $n\in \mathbf{N}^*$, matricea A^n are toate elementele numere naturale nenule, aşadar matricea A^{2007} are aceeaşi proprietate.

g) Numărul elementelor mulţimii M este egal cu 3^9.

Subiectul IV

a) $f'(x)=a\cdot x^{a-1}$, $\forall\, x>0$.

b) Pentru $a>1$, $f''(x)=a(a-1)\cdot x^{a-2}>0$, $\forall\, x>0$, deci f este convexă pe $(0,\infty)$.

c) Funcţia f este funcţie Rolle pe fiecare dintre intervalele $[3,4]$ şi $[5,6]$ şi conform teoremei lui Lagrange, există $c(a)\in(3,4)$ şi $d(a)\in(5,6)$, astfel încât $\dfrac{f(4)-f(3)}{4-3}=f'(c(a))$ şi $\dfrac{f(6)-f(5)}{6-5}=f'(d(a))$, de unde rezultă concluzia.

d) Ecuaţia din enunţ are, evident, soluţiile $x=0$ şi $x=1$.

Pentru $x>1$, avem $(g(x))^{x-1}<4^{x-1}<5^{x-1}<(h(x))^{x-1}$, deci nu există soluţii, iar pentru $x<1$, $x\neq 0$, rezultă analog că nu avem soluţii.

e) Pentru $x\in \mathbf{R}$ şi funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(t)=t^x$, din **c)** deducem că există $c(x)\in(3,4)$ şi $d(x)\in(5,6)$, astfel încât $4^x-3^x=x(c(x))^{x-1}$ şi $6^x-5^x=x(d(x))^{x-1}$.
şi din **d)** obţinem că singurele soluţii ale ecuaţiei din enunţ sunt $x=0$ şi $x=1$.

f) Se demonstrează prin calcul direct, ridicând la pătrat inegalităţile, sau alegând $x=\dfrac{1}{2}$ şi apoi $x=2$ şi raţionând ca în demonstraţia punctului **d)**.

g) Pentru $x\in \mathbf{R}$ şi funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(t)=t^x$, folosind **c)** deducem că pentru $x\in[1,2]$ avem $4^x+5^x\le 3^x+6^x$, şi integrând această inegalitate pe intervalul $[1,2]$ rezultă concluzia.